Théorie des ensembles

Les ensembles ont été brièvement présentés en début d'année, ici on étudie ceux-ci de manière plus approfondie.
E, F, G, H désignent des ensembles.

I. Ensembles

1°) Inclusion

Déf : On dit que E est inclus dans F, et on note $E \subset F$, ssi tout élément de E est aussi élément de F.
Ainsi : $E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F$.

Prop : $E = F \Leftrightarrow E \subset F$ et $F \subset E$.

Prop : $E \subset F$ et $F \subset G \Rightarrow E \subset G$,

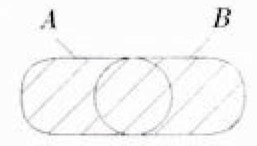
2°) Sous ensemble

Déf : On appelle partie (ou sous-ensemble) d'un ensemble E tout ensemble A inclus dans E.
L'ensemble formé des parties de E est noté : $\mathcal{P}(E)$.

3°) Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

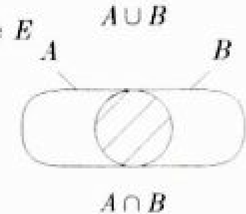
Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

a) union et intersection



$A \cup B$

Déf : On appelle union de A et B l'ensemble noté $A \cup B$ formé des éléments de E qui appartiennent à A ou à B :
Ainsi $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$.



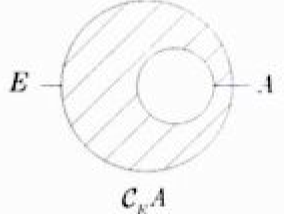
$A \cap B$

Déf : On appelle intersection de A et B l'ensemble noté $A \cap B$ formé des éléments de E qui appartiennent à A et à B :
Ainsi $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Prop : $A \cup A = A, A \cap A = A$,
$A \cup E = E, A \cap E = A$,
$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$,
$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$,
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ noté $A \cup B \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ noté $A \cap B \cap C$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Prop : Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$.
Si $C \subset A$ et $C \subset B$ alors $C \subset A \cap B$.

b) complémentaire

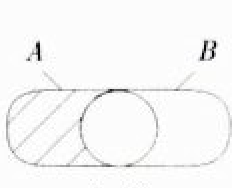
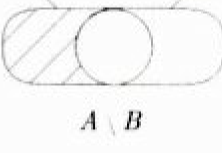


$\mathcal{C}_E A$

Déf : On appelle complémentaire d'une partie A de E l'ensemble noté $\mathcal{C}_E A$ formé des éléments de E qui ne sont pas dans A.
Ainsi $\mathcal{C}_E A = \{x \in E / x \notin A\}$.

Prop : $\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E A) = A$,
$\mathcal{C}_E(A \cup B) = \mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B$,
$\mathcal{C}_E(A \cap B) = \mathcal{C}_E A \cup \mathcal{C}_E B$,
$A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{C}_E B \subset \mathcal{C}_E A$.

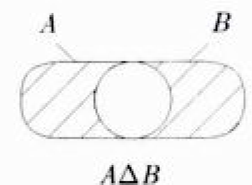
c) différences

$A \setminus B$

Déf : On appelle ensemble A privé de B l'ensemble noté $A \setminus B$ (ou $A - B$) constitué des éléments de E qui sont dans A sans être dans B. Ainsi :
$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

Prop : $A \setminus B = A \cap \mathcal{C}_E(B)$.



Déf : On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A\Delta B$ déterminé par $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Prop : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

Prop : $A\Delta A = \varnothing, A\Delta\varnothing = A$ et $A\Delta E = \mathcal{C}_E A$.
$A\Delta B = B\Delta A$ et $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

4°) Familles

I désigne un ensemble.

a) définition

Déf : On appelle famille d'éléments de E indexée sur I la donnée, pour tout $i \in I$ d'un élément de E, noté par a_i. Une telle famille est alors notée $(a_i)_{i\in I}$.
On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées sur I.

Déf : Soit J une partie de I.
$(a_i)_{i\in J}$ est appelée sous famille de $(a_i)_{i\in I}$.
$(a_i)_{i\in I}$ est appelée sur famille de $(a_i)_{i\in J}$.

b) famille finie

Déf : Lorsque I est un ensemble fini, on dit que la famille est finie.
Lorsque $I = \{1,...,n\}$ on note souvent $(a_i)_{1\le i\le n}$ au lieu de $(a_i)_{i\in I}$.
Cette famille est alors usuellement confondue avec le n uplet : $(a_1,...,a_n)$.

c) suite

Déf : Lorsque $I = \mathbb{N}$, la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite d'éléments de E.
On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de ces suites.

d) famille de parties d'un ensemble

Déf : On appelle famille de parties d'un ensemble E, toute famille $(A_i)_{i\in I}$ formée d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ i.e. telle que $\forall i \in I, A_i \subset E$.

Déf : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On pose :
- $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E / \exists i \in I, x \in A_i\}$ appelée union de la famille $(A_i)_{i\in I}$.
- $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E / \forall i \in I, x \in A_i\}$ appelée intersection de la famille $(A_i)_{i\in I}$.

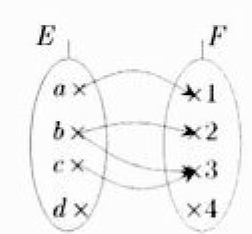
En Particulier : Si $I = \varnothing$ alors : $\bigcup_{i\in I} A_i = \varnothing$ et $\bigcap_{i\in I} A_i = E$.

Déf : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E ssi $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

Déf : On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E ssi c'est un recouvrement formée de parties non vides deux à deux disjointes.

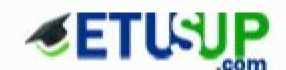
II. Applications

1°) Définition



Déf : On appelle graphe de E vers F toute partie Γ de $E \times F$.
E est appelé ensemble de départ et F ensemble d'arrivée du graphe g.

Déf : On dit qu'un graphe de E vers F est le graphe d'une application f de E vers F ssi $\forall x \in E, \exists! y \in F$ tel que $(x,y) \in \Gamma$.
Pour tout $x \in E$, l'unique $y \in F$ tel que $(x,y) \in \Gamma$ est appelé image de x par l'application f, on la note $f(x)$. Pour tout $y \in F$, les $x \in E$, s'il en existe, tels que $y = f(x)$ sont appelés antécédents de y par l'application f.



On note $f : E \to F$ pour signifier que f est une application de E vers F (définie par l'intermédiaire de son graphe).
On note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E vers F.

Prop : Soit $f,g : E \to F$. On a $f = g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$.

2°) Composition d'applications

Déf : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
On appelle composée de f par g l'application $g \circ f : E \to G$ définie par :
$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Symboliquement : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, $\xrightarrow{g \circ f}$

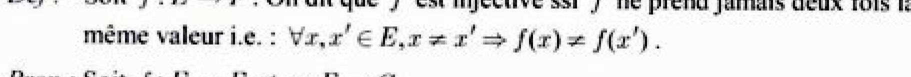
Prop : Soit $f : E \to F, g : F \to G$ et $h : G \to H$.
On a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ encore noté $h \circ g \circ f$.

Prop : Soit $f : E \to F$.
On a $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.

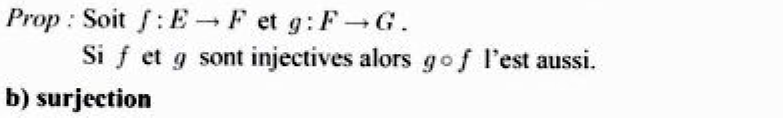
3°) Injection et surjection

a) injection

Déf : Soit $f : E \to F$. On dit que f est injective ssi f ne prend jamais deux fois la même valeur i.e. : $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

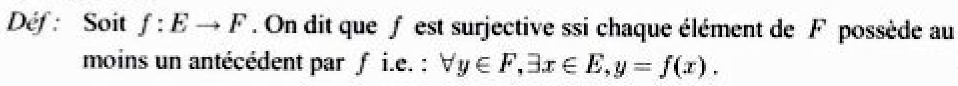


Prop : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

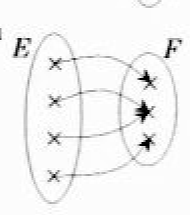


b) surjection

Déf : Soit $f : E \to F$. On dit que f est surjective ssi chaque élément de F possède au moins un antécédent par f i.e. : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.



Prop : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.



4°) Bijection

a) définition

Déf : Soit $f : E \to F$. On dit que f est bijective ssi chaque élément de F possède un unique antécédent par f dans E i.e. : $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

Prop : Soit $f : E \to F$. On a équivalence entre :
(i) f est bijective,
(ii) f est injective et surjective.

Prop : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

b) application réciproque



Prop : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Théorème :
Soit $f : E \to F$. On a équivalence entre :
(i) f est bijective,
(ii) $\exists g \in F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
De plus, si tel est le cas, l'application g ci-dessus est unique. On l'appelle application réciproque de f et on la note f^{-1}.

Cor : Soit $f : E \to F$. Si f est bijective alors on peut introduire $f^{-1} : F \to E$ et on a :
$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Cor : Soit $f : E \to F$. Si on détermine $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ alors on peut conclure : f bijective et $f^{-1} = g$.

Prop : Soit $f : E \to F$. Si f est bijective alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Prop : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ aussi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

c) permutation

Déf : On appelle permutation de E toute application bijective de E dans E.
On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E.

Prop : $\forall f, g \in \mathfrak{S}(E), f \circ g \in \mathfrak{S}(E)$ et $g \circ f \in \mathfrak{S}(E)$. $\forall f \in \mathfrak{S}(E), f^{-1} \in \mathfrak{S}(E)$.

Déf : On appelle involution de E toute application $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Prop : Soit $f : E \to E$. On a équivalence entre :
(i) f est une involution,
(ii) f est bijective et $f^{-1} = f$.

5°) Image directe, image réciproque d'une partie.

a) image directe

Déf : Soit $f : E \to F$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle image directe de A par f l'ensemble noté $f(A)$ formé des valeurs prises par f sur A.
Ainsi $f(A) = \{f(x) \text{ avec } x \in A\} = \{f(x) / x \in A\}$.

Déf : Soit $f : E \to F$. On appelle image de f l'ensemble noté $\mathrm{Im} f$ constitué des valeurs prises par f sur E.
Ainsi $\mathrm{Im} f = f(E) = \{f(x) / x \in E\}$.

Prop : $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.

b) image réciproque

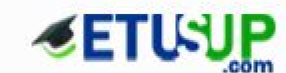
Déf : Soit $f : E \to F$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ formé des antécédents des éléments de B. Ainsi $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

6°) Prolongement et restriction d'une application

Déf : Soit $E, \tilde{E}, F, \tilde{F}$ quatre ensembles tels que $E \subset \tilde{E}$ et $F \subset \tilde{F}$.
Soit $f : E \to F$ et $\tilde{f} : \tilde{E} \to \tilde{F}$.
On dit que $\tilde{f}$ prolonge f ssi $\forall x \in E, \tilde{f}(x) = f(x)$.

Déf : Soit $f : E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$ telles que $\forall x \in A, f(x) \in B$.
On appelle restriction de f de A vers B l'application : $g : \begin{cases} A \to B \\ x \mapsto g(x) = f(x) \end{cases}$.

En particulier :
Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$.
L'application restreinte $\begin{cases} A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est appelée restriction de f à A (au départ) et est notée $f_{|A}$.
Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$ telle que $\mathrm{Im} f \subset B$.
L'application restreinte $\begin{cases} E \to B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est appelée restriction de f à l'arrivée dans B. On la note généralement encore f.




ETUSUP.com